フーリエ変換を用いた証券価格の導出

池田　亮一　（南山大学　経営学部）

2025 年　3 月　　NO.2403

フーリエ変換を用いた証券価格の導出

―信用リスク構造型アプローチを例として―

Derivation of security prices using Fourier transforms

2025 年 3 月

池田　亮一
南山大学経営学部
ikedaryo@nanzan-u.ac.jp

要約

本論文では， Ikeda and Igarashi(2016) において構築された 2 つのケースにおける信用リスク評価モデルで議論された債券価格や株式価格を例として用いながら，フーリエ変換を用いた新たな解の導出方法および解の一意性の証明を提示する。このモデルのように再帰的な関数方程式として表現された債券価格や株式価格は， これまでイテレーション(iteration)による数値計算によって求めるのが標準的だったが，本論文ではそれらが Wiener-Hopf 型積分方程式の解として表現され, 実際に解析的な解が存在することを示す。また，その一意性については Wiener-Hopf 作用素の回転数（winding number）に依存して決定され，Ikeda and Igarashi(2016) において構築されたモデルのように回転数が 0 の場合には解が一意であることが示される。同様の積分方程式において解の一意性を示す際には Blackwell の十分条件により判定されることが多いが，今回の手法はより緩やかな条件によって決定され，解の一意性を示す際に今後新たな方法として用いられることが期待される。

キーワード：フーリエ変換，Wiener-Hopf 型積分方程式，ブラックショールズモデル，信用リスク，構造型モデル，Blackwell の十分条件

Abstract

This paper presents a new method for deriving solutions using the Fourier transform and a proof of uniqueness of the solutions, using as examples the bond and equity prices discussed in the credit risk model in Ikeda and Igarashi (2016) in two cases. Bond and equity prices expressed as recursive functional equations, such as in this model, have been obtained numerically by iteration, but this paper shows that they can be expressed as solutions to Wiener-Hopf type integral equations and that analytical solutions do exist.

Key Words: Fourier Transform, Wiener-Hopf Integral Equation, Black-Sholes Model, Credit Risk, Structural Model, Blackwell's Sufficient Condition

１．イントロダクション

Merton(1974)の構造型アプローチは，債務としてゼロクーポン債を保有し，倒産の可能性がある企業の株式および債券価値を求めることができる信用リスク評価モデルである。Merton(1974)は，資産価値を幾何ブラウン運動と外生的に与えた場合，株式価値は資産価値を原資産としたヨーロピアン・コール・オプションのブラックショールズ価格になることを示している。

Ikeda and Igarashi(2016）は Merton(1974)を応用し，債券の償還を元の債券と同じ額面の発行・売却と，不足分を株式増資によって行うと仮定した無限期間モデルを構築した。このような無限期間モデルにより信用リスクを評価している論文には Black and Cox(1976)，Leland(1994)，Leland and Toft(1996)などがあるが，これらの論文では連続的にクーポンや額面の返済が行われるのに対し，Ikeda and Igarashi(2016）では離散的なタイミングで債券額面の償還を考えている。その理由は債務の返済が不可能である場合に債権者が償還を猶予する場合を考えるためであり，Ikeda and Igarashi(2016）では返済の猶予をしない通常のモデルをベースラインモデルとし，さらに債務の引受け手である債権者が，満期での資産価値に応じて一定期間だけ償還を猶予するモデルを構築し，その証券価値を求めた。それらの証券価値はある関数方程式を求めることに帰着されるが，その導出は数値計算によるイテレーション(iteration)により行われ，また解の存在および一意性は標準的な Blackwell の十分条件を拡張することで証明された。

この関数方程式の解法や解の存在の証明方法はファイナンス分野だけではなくマクロ経済学などでもよく知られているが，本論文ではフーリエ変換を用いた全く異なるアプローチによって解の導出やその一意性を示す。この導出方法で特徴的なことの一つは，従来の場合には必要だったイテレーションの計算が必要ないことであり，計算時間の短縮が大幅に短縮されることになる。また，解の一意性については，Blackwell の十分条件よりもより緩やかな条件によって決定されることが示される。フーリエ変換を用いたこのような解の導出方法や一意性に関する議論は，過去に例がなくまた応用範囲も広いと考えられ，今後さらなる発展が期待されるものである。

以下では，具体的な応用例として Ikeda and Igarashi(2016）でのモデルを挙げながら，その導出を示していく。第 2 章ではモデルの仮定と Wiener-Hopf 型積分方程式の導出，第 3 章でその解法，第 4 章で結論を述べる。

２．モデル

モデルは Ikeda and Igarashi(2016）に従うものとする。企業の資産価値 A_t はリスク中立確率の下で幾何ブラウン運動に従うと仮定する。

$$dA_t = A_t(rdt + \sigma dW_t) \quad W_t\text{は標準ブラウン運動}\ (t \geq 0)$$

企業は 0 時点において年限ΔT，額面 f の債券を 1 単位発行している。企業は $t_i = i\Delta T\ (i \in N)$ における資産価値 A_{t_i} が，時刻や経路に依存しない基準価値 $\underline{A}$ を上回った場合にのみ，債権者に額面を全額償還する。償還は年限ΔT，額面 f の債券を新たに 1 単位発行し，不足分は増資をすることにより行う。この $\underline{A}$ は，以下のケースに依存して内生的に求められるものであるが，本論文の主張の主旨からは外れるので，ここでは所与として考えておいてよい。

2.1　ケース 1: 猶予しない場合の債券価格と株式価格

この節では，ベースラインケースとして，資産価値が基準価値を下回った場合には債権者が猶予するオプションを持たない場合を考える。資産価値が基準価値を下回った場合，企業は資産を流動化し，資産の一部を費用として差し引いた後，債権者が流動化した資産を得る。このように仮定した場合の，債券発行直後の債券価値，株式価値はそれぞれ以下の通りである。

$$F(A;\overline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[f1_{\{\tilde{A}\geq\overline{A}\}} + \alpha\tilde{A}1_{\{\tilde{A}<\overline{A}\}}] \tag{1}$$

$$S(A;\overline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[(S(\tilde{A};\overline{A}) - (f - F(\tilde{A};\overline{A})))1_{\{\tilde{A}\geq\overline{A}\}}] \tag{2}$$

ただし， A_t はリスク中立確率の下で幾何ブラウン運動に従うことから

$$\log(\tilde{A}) \sim N(\log(A) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T, \sigma^2\Delta T)$$

である（ただし $N(\cdot)$ は標準正規分布の累積密度関数である）。

ここで， $H \equiv F + S$ とすると，

$$H(A;\overline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[H(\tilde{A};\overline{A})1_{\{\tilde{A}\geq\overline{A}\}} + \alpha\tilde{A}1_{\{\tilde{A}<\overline{A}\}}] \tag{3}$$

であるが，(3)式を以下のように変形する。

いま，

$$A = \overline{A}\exp(x) \Leftrightarrow x = \log(\frac{A}{\overline{A}})$$

$$\tilde{A} = \overline{A}\exp(y) \Leftrightarrow y = \log(\frac{\tilde{A}}{\overline{A}})$$

とすると，

$$H(\overline{A}\exp(x);\overline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[H(\overline{A}\exp(y);\overline{A})1_{\{y>0\}} + \alpha\overline{A}\exp(y)1_{\{y\leq 0\}}]$$

ただし，

$$y \sim N(x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T, \sigma^2 \Delta T)$$

これを新たに

$$H(\bar{A}\exp(x)) = \begin{cases} \varphi(x) & if\ x>0 \\ \varphi_1(x) & otherwise \end{cases},$$

$$\exp(-r\Delta T)E[\alpha(\bar{A}\exp(y))1_{\{y\le 0\}}] = f(x)$$

と置き直すと，

$$\varphi(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)E[\varphi(y)1_{\{y>0\}}]$$

であり，具体的に期待値を積分形式で表すと，

$$\varphi(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta T}}\exp(-\frac{(y-(x+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T))^2}{2\sigma^2\Delta T})\varphi(y)dy$$

であり，新たに

$$k(x) = \exp(-r\Delta T)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x+(r-1/2\sigma^2)\Delta T)^2}{2\sigma^2\Delta T}) \quad (4)$$

とおくと，

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (5)$$

である。また，

$$\varphi_1(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)E[\varphi(y)1_{\{y>0\}}]$$

であるので，(3)を満たす H を求めることはすなわち(5)の $\varphi(x)$ に関する積分方程式の解を求めることに帰着される。

2.2　ケース 2: 猶予する場合の債券価格と株式価格

こちらはケース 1 の発展的モデルである。満期において A_{t_i} が，$\underline{A}$ を下回った場合，ケース 1 では企業は倒産となったが，ケース 2 では，債権者は償還を猶予するか，倒産し資産を流動化するかを選択することができるものとする。債権者が償還を猶予する場合，また ΔT 後に償還日が訪れると仮定し，さらにその際も株主が償還しない場合には，債権者はさらに ΔT 年猶予することが可能であり，この猶予は何度でも行われると仮定する。また，債務返済が延期された場合には，新たな債券や株式は発行されないと仮定する。

このように仮定すると，このケースでも債券発行日（または延期決定日）直後における債務の期間構造はその時刻や過去の債務の返済履歴（つまり資産価値の過去の経路）に依存しないため，債券の各満期ではやはり時間同質的となる無限期間モデルになる[1]。

いま，額面が全額償還される資産価値の下限 $\underline{A}$，および債権者が猶予するような資産価値の上限 $\overline{A}$ を所与と仮定する($\overline{A} \le \underline{A}$)。ある債券発行日における資産価値を A，ΔT 後の資産価値を $\tilde{A}$ とし，債券価格 $F(A)$ とおくと[2],

$$F(A;\overline{A},\underline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[P(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}\ge\overline{A}\}} + F(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<\overline{A}\}}] \tag{6}$$

求められる。ただし $P(\tilde{A})$ は債務返済が延期されなかった場合の債権者へのペイオフであり，

$$P(A) = \begin{cases} f & if \;\; A > \underline{A} \\ \alpha A & if \;\; \overline{A} \le A \le \underline{A} \end{cases}$$

である。さらに株式価値は以下のようになる。

$$S(A;\overline{A},\underline{A}) = \exp(-r\Delta T)E[(S(\tilde{A}) - (f - F(\tilde{A})))1_{\{\tilde{A}\ge\underline{A}\}} + S(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<\overline{A}\}}]$$

特に α=0 のときは債権者には倒産を選択するインセンティブがなくなり，倒産のリスクは消滅する。従って，株式価値と債券価値の和は資産価値に等しくなるので，満期での返済条件 $S(\tilde{A}) - (f - F(\tilde{A})) > 0$ は $\tilde{A} > f$ と同値である。すなわち，

$$P(A) = f \qquad if \;\; \overline{A} \le A$$

であり，

$$F(A;f,f) = \exp(-r\Delta T)E[f1_{\{\tilde{A}\ge f\}} + F(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<f\}}]$$

$$S(A;f,f) = \exp(-r\Delta T)E[(\tilde{A} - f)1_{\{\tilde{A}\ge f\}} + S(\tilde{A})1_{\{\tilde{A}<f\}}]$$

ここで債券価格式(6)に着目する。

いま，

$$A = \overline{A}\exp(-x) \Leftrightarrow x = \log(\frac{\overline{A}}{A})$$

---

[1] このような理由から,以下では「債券発行日直後」と表現した場合には債券が発行されずに債務返済が延期された場合も含まれることにする.

[2] この節で証券価格などに用いられている関数について, 関数名が同じでも関数自体は前節のものとは基本的に異なるものである。

$$\tilde{A} = \bar{A}\exp(-y) \Leftrightarrow y = \log(\frac{\bar{A}}{\tilde{A}})$$

と変数変換すると[3](6)式は新たに

$$F(\bar{A}\exp(-x)) = \exp(-r\Delta T)E[P(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y\le 0\}} + F(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y>0\}}],$$

であり，

$$y \sim N(x-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T, \sigma^2\Delta T)$$

である。新たに

$$F(\bar{A}\exp(-x)) = \begin{cases} \varphi(x) & if \quad x>0 \\ \varphi_1(x) & otherwise \end{cases},$$

$$\exp(-r\Delta T)E[P(\bar{A}\exp(-y))1_{\{y\le 0\}}] = f(x)$$

と置き直すと

$$\varphi(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)E[\varphi(y)1_{\{y>0\}}]$$

であり，積分形式で表すと，

$$\varphi(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta T}}\exp(-\frac{(y-(x-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T))^2}{2\sigma^2\Delta T})\varphi(y)dy$$

である。

$$k(x) = \exp(-r\Delta T)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\Delta T)^2}{2\sigma^2\Delta T}) \tag{7}$$

とおいて，

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{8}$$

と，ケース１と同じ形の積分方程式が得られる。

なお，やはり同じように$x \le 0$では，得られた$\varphi(x)$を用いた別関数

$$\varphi_1(x) = f(x) + \exp(-r\Delta T)E[\varphi(y)1_{\{y>0\}}]$$

として求めればよいので，問題は(8)式を解くことに帰着される。

---

[3] ケース１のときの変形とは異なることに注意すること。

2.3 Wiener-Hopf 方程式

(5)あるいは(8)で表される関数方程式は積分方程式と呼ばれ，特にそれらのタイプはWiener-Hopf（以下 WH）方程式という。この方程式は歴史的には，宇宙空間における光の流れに関する研究に端を発しとされ，1931 年に Weiner および Hopf により一般化され研究された。この節ではこの方程式に関するこの論文で重要な結論を先に述べる。

(5)あるいは(8)の左辺で定義される作用素

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\varphi(x) := \varphi(x) - \int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy$$

を WH 作用素とよび,

$$1-K(\xi) := 1 - \int_{-\infty}^\infty k(x)\exp(-i\xi x)dx$$

を WH 作用素$\mathbf{I}-\mathbf{K}$のシンボルとよぶ。また，このシンボルの回転数：

$$\begin{aligned}\kappa_K &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d_\xi \arg(1-K(\xi)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\arg(1-K(\xi)\right]_{-\infty}^\infty\end{aligned}$$

を WH 作用素の指数とよぶ。フーリエ変換$\mathfrak{I}$を

$$\mathfrak{I}k(\xi) = \int_{-\infty}^\infty k(x)e^{-i\xi x}dx$$

のように定義すると，フーリエ逆変換は

$$\mathfrak{I}^{-1}k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty K(x)e^{i\xi x}d\xi$$

である。

このとき，以下が成立する。

定理 1

いま， φを未知関数とする WH 方程式

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-y)\varphi(y)dy = f(x) \ (x>0)$$

について，その WH 作用素の指数$\kappa_K = 0$とする。このとき，解は以下のように表され，かつ一意に決まる。

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty l(x,y)f(y)dy$$

ただし,

$$l(x,y) = l_+(x-y) + l_-(x-y) + \int_0^{\min(x,y)} l_+(x-z)l_-(z-y)dz$$

であり，$l_{\pm}(x)$ は，$\mp x>0$ で 0 となる関数であり，

$$K(\xi)=\Im k$$

とおき，

$$g(x)=\Im^{-1}(\log(1-K(\xi)))$$

によって定義される

$$K_{\pm}(\xi)=1-\exp(\pm\int_0^{\pm\infty}g(x)e^{-i\xi x}dx)$$

を用いて

$$l_{\pm}(x)=\Im^{-1}\left(\frac{K_{\pm}(\xi)}{1-K_{\pm}(\xi)}\right)$$

とあらわされる。□

次章でこの証明を Krein(1960)の手法に沿って述べる。

いま，

$$f_0(x)=\begin{cases} f(x) & if\ \ x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

とし，$F_0(\xi)=\Im f_0(x)$ として定理 1 の証明から以下が言える。

系 2

WH 作用素の指数が 0 のとき，

$$\varphi_0(x)=\Im^{-1}\left(\frac{F_0(\xi)}{1-K(\xi)}\right)$$

として $\varphi_0(x)$ は

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} \varphi(x) & if\ \ x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

を満たす。すなわち，WH 方程式の解 $\varphi(x)$ は $(1-K(\xi))\Phi_0(\xi)=\Im f_0$ から得られる $\Phi_0(\xi)$ を逆フーリエ変換して得られた関数 $\varphi_0(x)$ の正の領域として一意に求められる。□

証明は 3 章にて述べる。

系 3

(4)式および(7)式で定義される k から導かれる WH 作用素の指数は共に 0 である。□

証明は 3 章にて述べる。

3. Wiener-Hopf 型積分方程式の解法

3.1 種々の積分方程式

いま，4 種類の異なる積分方程式を比較する。ただし，$k, f \in L^1(R)$ [4]を所与の関数とし， φ を未知関数とする。

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x)(-\infty < x < \infty) \tag{9}$$

$$\varphi(x) - \int_{0}^{x} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x)\ (x > 0) \tag{10}$$

$$\varphi(x) - \int_{x}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x)(x > 0) \tag{11}$$

$$\varphi(x) - \int_{0}^{\infty} k(x-y)\varphi(y)dy = f(x)(x > 0) \tag{12}$$

どれも似た構造に見えるが 4 つの積分方程式は積分区間が異なる。

(9)は積分区間が負の無限大から正の無限大までである。この場合は両辺をフーリエ変換するのが一般的である。関数k，φ，f のフーリエ変換をそれぞれ$K(\xi)$ $\Phi(\xi)$ $F(\xi)$ とすると，たたみこみ定理により，

$$(1 - K(\xi))\Phi(\xi) = F(\xi)\ (\xi \in R)$$

であり， $1 - K(\xi) \neq 0\ (\xi \in R)$ が成立するならば，(9)の両辺を$1 - K(\xi)$ で割ってフーリエ逆変換することによって，一意な解$\varphi(x)$ が得られる事が知られている [5]。

(10)(11)は積分区間がそれぞれ 0 から x>0 までと x>0 から正の無限大までだが, これらは共に(9)の方法を応用して解くことができる。f，φ を共に$x \leq 0$ では 0 と拡張し，さらにk について(10)では$x \leq 0$ で 0，(11)では$x > 0$ で 0 と拡張することによって，(9)の形になることが容易に分かる。ただし，$\varphi(x)$ がともに一意に決まるための必要十分条件は

$$1 - K(\xi) \neq 0\ (\xi \in R)$$

の他に，(10)では

$$1 - K(\xi) \neq 0\ (\xi \in C_-)$$

が，(11)では

$$1 - K(\xi) \neq 0\ (\xi \in C_+)$$

が同時に成り立つことであることが知られている。

しかし(12)はこのように関数の単純な拡張によって他の三つの積分方程式の形に落とし込むことができない。そこで，(12)の左辺をうまく(10)および(11)の左辺の形を含む式に分解

---

[4] ルベーグ積分の意味で$\int_I |f(x)|dx < \infty$ となるI 上の関数f 全体を$L^1(I)$ と書く.また, R は実数全体, C は複素数全体集合を表す.

[5] 解の一意性を含めこの手法が正当化されたのは Wiener(1932)による。

して解く方針で，以後説明を展開する。

3.2 定理 1 の証明 [6]

一般には２つの WH 作用素$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)$，$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$の積$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$は WH 作用素にならないが，次が言える。

補題 4

２つの WH 作用素

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_i)\varphi(x) := \varphi(x) - \int_0^\infty k_i(x-y)\varphi(y)dy \quad (i=1,2)$$

において，$k_1(x)=0\ (x>0)$，$k_2(x)=0\ (x<0)$の少なくとも一方が成立しているとする。このとき，$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_1)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_2)$も WH 作用素になりそのシンボルは$(1-K_1(\xi))(1-K_2(\xi))$で与えられる。 □

（証明は上村（2001）参照）

補題 5

$$1-K(\xi)\neq 0\ (\xi\in R)$$

を仮定し，またその回転数$\kappa_K=0$とする。このとき$1-K(\xi)$は

$$1-K(\xi)=(1-K_-(\xi))(1-K_+(\xi))\ (\xi\in R)$$

の形に一意に分解される。ただし$1-K_\pm(\xi)$は$C_\mp := \{\xi \mid \mp \mathrm{Im}\,\xi > 0\}$で正則，その閉包$\overline{C}_\mp$で連続で零点を持たず，さらに$k_\pm \in L^1(0,\pm\infty)$によって，

$$1-K_+(\xi)=1-\int_0^\infty k_+(x)\exp(-i\xi x)dx\ (\xi\in R)$$

$$1-K_-(\xi)=1-\int_{-\infty}^0 k_-(x)\exp(-i\xi x)dx\ (\xi\in R)$$

と表される。 □

この補題 5 の証明は以下の定理 6 及び 6’がエッセンスである。

定理 6

Dを複素平面Cにおける領域で，$0\in D$とする。$\phi(z)$をDにおいて正則な関数で$\phi(0)=0$

---

[6] この節は上村（2001）を参考にしている．

を満たすものとする。$f \in L^1(R)$ に対し，閉曲線 $z = \Im f(\xi)$ $(-\infty \le \xi \le \infty)$ が D 内にあるならば,

$$\phi(\Im f(\xi)) = \Im g(\xi) \ (\xi \in R)$$

となる

$$g \in L^1(R)$$

がある。 □

定理 6'

定理 6 の仮定に加えて，さらに $f(x) = 0 (x < 0)$，$\Im f(\xi) \in D$ $(\xi \in \overline{C}_-)$ を仮定する。このとき定理 6 で得られた $g \in L^1(R)$ は $g(x) = 0$ $(x < 0)$ を満たす。□

（定理 6・6'とも証明は上村（2001）参照のこと）

補題 5 を証明する。

証明

定理 6 より，$\phi(z) = 1 - \exp(z)$ とおくと，

$$1 - K(\xi) = \exp\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

となる $g \in L^1(R)$ が存在する。

そこで，$K_\pm$ を

$$1 - K_+(\xi) := \exp\left[\int_0^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

$$1 - K_-(\xi) := \exp\left[\int_{-\infty}^{0} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$$

と定義する。

$K_+(\xi) = 1 - \exp\left[\int_0^{\infty} g(x)\exp(-i\xi x)dx\right]$ より，$\phi(z) = 1 - \exp(z)$，$D = C$ とおいて定理 4´ を適用することにより，$k_+ \in L^1(0,\infty)$ の存在がわかる。同様の議論により，$k_- \in L^1(-\infty,0)$ の存在がわかり，補題 5 が証明された。 □

作用素 $(\mathbf{I} - \mathbf{K})$ のシンボル $1 - K(\xi)$ を補題 5 のように分解し得られた $k_\pm(x)$ によって WH 作用素 $(\mathbf{I} - \mathbf{K}_\pm)$ を

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{\pm})\varphi(x) := \varphi(x) - \int_0^\infty k_{\pm}(x-y)\varphi(y)dy$$

で定義する。このとき,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{+})\varphi(x) = \varphi(x) - \int_0^\infty k_{+}(x-y)\varphi(y)dy$$
$$= \varphi(x) - \int_0^x k_{+}(x-y)\varphi(y)dy$$

より，積分方程式

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{+})\varphi(x) = f(x)$$

は(10)と同形であり，同様に,

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{-})\varphi(x) = \varphi(x) - \int_0^\infty k_{-}(x-y)\varphi(y)dy$$
$$= \varphi(x) - \int_x^\infty k_{-}(x-y)\varphi(y)dy$$

より積分方程式

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{-})\varphi(x) = f(x)$$

は(11)と同形となり，共に積分方程式を解くことができる。
いま，補題 4 より

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}) = (\mathbf{I}-\mathbf{K}_{-})(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{+})$$

であるから，よって $\kappa_K = 0$ のときの(12)の積分方程式は

$$\varphi(x) = (\mathbf{I}-\mathbf{K}_{+})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_{-})^{-1} f(x)$$

と表すことができる。

ここで，より具体的な解の形式を得るため以下の系を用いる。

系 7

定理 6´ において $D = C \setminus \{1\}$，$\phi(z) = \dfrac{z}{1-z}$ とする。このとき $1-\Im f(\xi) \neq 0$ $(\xi \in \overline{C}_{-})$ を満たす $f \in L^1(0,\infty)$ に対し,

$$\frac{1}{1-\Im f(\xi)} = 1 + \Im g(\xi) \ (\xi \in R)$$

となる $g \in L^1(0,\infty)$ が存在する。 □

証明は上村（2001）参照のこと。

補題 5 における $K_{\pm}(\xi)$ に系 7 を適用すると,

$$\frac{1}{1-K_\pm(\xi)} = 1 + \int_0^{\pm\infty} l_\pm(x)\exp(-i\xi x)dx \ (\xi \in R)$$

となる $l_\pm \in L^1(0,\pm\infty)$ の存在が得られる。

これを用いて $(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)\varphi(x) = f(x)$ の両辺をフーリエ変換すると

$$(1-K_\pm(\xi))\Phi(\xi) = F(\xi) \ (\xi \in R)$$

である。両辺 $(1-K_\pm(\xi)) \neq 0 \ (\xi \in R)$ で割って

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= F(\xi)\frac{1}{(1-K_\pm(\xi))} \\ &= F(\xi)\left(1 + \int_0^{\pm\infty} l_\pm(x)\exp(-i\xi x)dx\right)\end{aligned}$$

であるから，両辺フーリエ逆変換して

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty l_\pm(x-y)f(y)dy$$

を得る。つまりこれから

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_\pm)^{-1}f(x) = f(x) + \int_0^\infty l_\pm(x-y)f(y)dy \ (x \geq 0)$$

の表現が得られるので，

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)^{-1}f(x) \\ &= f(x) + \int_0^\infty l_-(x-y)f(y)dy \\ &\quad + \int_0^\infty l_+(x-y)dy\left\{f(y) + \int_0^\infty l_-(y-z)f(z)dz\right\} \\ &= f(x) + [\int_0^\infty l_-(x-y)f(y)dy + \int_0^\infty l_+(x-y)f(y)dy \\ &\qquad + \int_0^\infty\left(\int_0^\infty l_+(x-z)l_-(z-y)dz\right)f(y)dy]\end{aligned}$$

$l_\pm(\mp x) = 0 \ (x \geq 0)$ に注意して

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty l(x,y)f(y)dy$$

ただし

$$l(x,y) := l_+(x-y) + l_-(x-y) + \int_0^{\max(x,y)} l_+(x-z)l_-(z-y)dz$$

が得られる。□

3.3 定理 2 の証明

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K})\varphi(x) = f(x) \ \ (x > 0)$$

は，

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi(x)=f(x)$$

である。$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi(x)=p(x)$ とおくと，

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)p(x)=f(x)$$

この方程式の解は，定義域を広げ

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_-)p_0(x)=f_0(x) \tag{13}$$

として求めた解が

$$p_0(x)=\begin{cases} p(x) & if\ \ x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

であることより求められる。(13)を両辺フーリエ変換して，

$$(1-K_-(\xi))\Im p_0=\Im f_0$$

$$\Im p_0=\frac{\Im f_0}{1-K_-(\xi)} \tag{14}$$

$$p_0(x)=\Im^{-1}\left(\frac{\Im f_0}{1-K_-(\xi)}\right)$$

$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi(x)=p(x)$ についても定義域を広げ，

$$(\mathbf{I}-\mathbf{K}_+)\varphi_0(x)=p_0(x) \tag{15}$$

としたものを考えれば，

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} \varphi(x) & if\ \ x>0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

である。(15)を両辺フーリエ変換して(14)を用いると，

$$\begin{aligned}(1-K_+(\xi))\Im\varphi_0&=\Im p_0\\ &=\frac{\Im f_0}{1-K_-(\xi)}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\Im\varphi_0&=\frac{\Im f_0}{(1-K_+(\xi))(1-K_-(\xi))}\\ &=\frac{\Im f_0}{1-K(\xi)}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\varphi_0(x)=\Im^{-1}\left(\frac{\Im f_0}{1-K(\xi)}\right) \tag{17}$$

で題意示された。□

3.4　系 3 の証明

・ケース 1 の場合

$$k(x)=\exp(-r\Delta T)\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x+(r-1/2\sigma^2)\Delta T)^2}{2\sigma^2\Delta T})$$

について，

$$R=\exp(-r\Delta T)(<1)$$
$$b=\sigma\sqrt{\Delta T}$$
$$c=(r-1/2\sigma^2)\Delta T$$

とおくと

$$k(x)=R\cdot\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x+c)^2}{2b^2})$$

$$\begin{aligned}K(\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty}k(x)\exp(-i\xi x)dx\\&=R\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x+c)^2}{2b^2})\exp(-i\xi x)dx\\&(=R\cdot(N(-c,b^2)\text{の特性関数の共役複素関数}))\\&=R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2+ic\xi)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}1-K(\xi)&=1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2+ic\xi)\\&=1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2)\exp(ic\xi)\\&=1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2)(\cos(c\xi)+i\sin(c\xi))\end{aligned}$$

$-\infty\le\xi\le\infty$ において，$1-K(\xi)$ の実部がとる最小値は $\xi=0$ のとき $1-R(>0)$ であるので，明らかに $-\infty\le\xi\le\infty$ で $1-K(\xi)\ne0$ である。

また回転数 κ について，$-\infty\le\xi\le\infty$ での複素平面 C 上において $1-K(\xi)$ は 1 を出発して C 上をぐるぐる回ってまた 1 に戻ってくる閉曲線だが，上述のように $1-K(\xi)$ の実部がとる最小値が $1-R(>0)$ であるから，$-\infty\le\xi\le\infty$ で $1-K(\xi)$ は原点の周りを 1 度も回らないことがわかり，$\kappa=0$ が言える。□

・ケース 2 の場合

ケース 1 とほぼ同じ証明となる。

$$k(x)=R\cdot\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-c)^2}{2b^2})$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
K(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x)\exp(-i\xi x)dx \\
&= R\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-c)^2}{2b^2})\exp(-i\xi x)dx \\
&(= R\cdot(N(c,b^2)\text{の特性関数の共役複素関数})) \\
&= R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2 - ic\xi)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
1-K(\xi) &= 1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2 - ic\xi) \\
&= 1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2)\exp(-ic\xi) \\
&= 1-R\cdot\exp(-\frac{b^2}{2}\xi^2)(\cos(c\xi)-i\sin(c\xi))
\end{aligned}
$$

よって，ケース 1 の場合と同じ理由により $-\infty \le \xi \le \infty$ で $1-K(\xi)\neq 0$ であり，$1-K(\xi)$ は複素平面上で原点の周りを 1 度も回らないことがわかり，$\kappa = 0$ が言える。□

3.5 考察

定理 1 および系 3 により，当初のモデルでの(5)および(8)が一意の解を持つことがわかる。ただし，定理 1 で表現される積分方程式の解の式に基づいて，具体的にモデルの元の関数を代入して陽に解を表そうとしてもフーリエ変換や逆フーリエ変換で得られる式がきれいな形にならないため，結局陽な形で解を求めることはできなかった。しかし，定理 1 を得る過程で得られた重要な事実として，回転数が 0 の WH 作用素で表される積分方程式が，特殊な WH 作用素の積で表されることが挙げられる。この事実によって，その特殊な WH 作用素で表された積分方程式はフーリエ変換と簡単な変形と逆フーリエ変換で簡単に解が得られるタイプであることから，実は回転数が 0 であるような WH 作用素で表される積分方程式は，「単純に」両辺をフーリエ変換して，変形して逆フーリエ変換に持ち込むことができるという系 2 が成立することがわかった。これは非常に驚くべき結果である。定理 1 を見ると，解を得るためにはあたかも WH 作用素のシンボルの分解は必須で，何度もフーリエ変換と逆フーリエ変換を繰り返さなければいけないように思われるのだが，実は解を求めるだけならば分解の必要はないということである。フーリエ変換や逆フーリエ変換を行う際には数値積分は必要とはなるが，イテレーションをするわけではないというので計算負荷は低いというメリットが考えられる。

解の一意性の議論に関しては，結局 WH 作用素のシンボルの回転数が 0 であることと同値であることが分かった。Ikeda and Igarashi (2016)では，元々の Blackwell の解の存在条

件では解の一意性を言うことは不可能で，拡張した十分条件によってようやく解の一意性を言うことができたわけなので，今回の方法はより使い勝手の良い証明手段といえよう。今回の解の一意性を議論する条件に付いて，Blackwell の解の存在条件が十分条件であったことと比較すると，こちらの条件は必要十分条件であるという意味で，今回の我々のモデルだけでなく，別の様々なモデルにおいて積分方程式の解の存在を議論する際に有効な証明方法となる可能性が十分に考えられる。

4．結論

この論文では，ファイナンスやマクロ経済学で頻繁に現れる積分方程式の解の導出や一意性の証明について，フーリエ変換を用いた手法を，信用リスク構造型アプローチによるモデルを用いて議論した。今回の例では WH 積分方程式というタイプの最も複雑なタイプの積分方程式の解について議論することとなったが，そこで定義される作用素のシンボルについて，その回転数が 0 である場合には解析解が一意に存在することが示された。今回のモデルの例では残念ながら実際には完全に陽な形式で解を表すことができないが，従来はイテレーションによって解の導出していたものが，数値積分で解を得ることができるという意味で計算負荷を減らすことができると考えられる。また，解の一意性の議論においては，従来 Blackwell の条件よりもより緩い条件で解の一意性を議論ができるという意味では非常に有効な議論の方法であると考えられ，今後はこの手法がどのようなモデルなど応用できるか見極めたいと考える。

参考文献

Black， F.， and J. C. Cox， 1976， “Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions，” Journal of Finance

Black，F.，and M. Scholes，1973，“The Pricing of Options and Corporate Liabilities，” The Journal of Political Economy

Delianedis， G. and R. Geske， 1998， Credit Risk and Risk Beutral Default Probabilities: Information about Rating Migrations and Defaults，” UCLA， Anderson Working Paper

Geske， R. 1977， “The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options，” Journal of Financial and Quantitatives Analysis

Ikeda, R., and Igarashi, Y., 2016, “Credit risk analysis with creditor's option to extend maturities,” Annals of Finance

M. G. Krein, 1960, “Integral equations on a half-line with kernel depending upon the

difference of the arguments,"　Amer. Math. Soc. Transl
Leland,　H.,　1994,　"Corporate Debt Value,　Bond Covenants,　and Optimal Capital Structure,"　Journal of Finance
Leland，H. and Toft，K，1996，"Optimal Capital Structure，Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads,"　Journal of Finance
Merton,　R.,　1974,　"On the Pricing of Corporate Debt: the risk structure of interest rates,"　Journal of Finance
Wiener, N., 1932, "Tauberian Theorems," Ann. Math.,
池田亮一，　小林孝雄，高橋明彦，2005 年，「負債の期間構造と信用リスク評価」，　東京大学 CIRJE ディスカッションペーパー，　CIRJE-J-131
池田亮一，小林孝雄，2007 年，「非経路依存型バランスシートアプローチ」，東京大学 CARF ディスカッションペーパー，CARF-J-038
上村豊，2001 年，「積分方程式―逆問題の視点から―」，共立出版